1)

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\left[y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) \right]$$

Rozšíření λ-matice má tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-1 & 1 & -x^2 \\ -1 & \lambda-3 & 2x \end{array}\right) \cdot(-(\lambda-3)) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda-1 & 1 & -x^2 \\ -\lambda^2+4\lambda-4 & 0 & 2x+x^2(\lambda-3) \end{array}\right) \quad (*)$$

$(*)\quad x^2(\lambda - 3) \rightsquigarrow (x^2)' - 3x^2 = -3x^2 + 2x$

Wiederholung:

$\lambda \cdot \cos(x) \rightsquigarrow (\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\lambda^2+3)e^{3x} \rightsquigarrow (e^{3x})'' + 3e^{3x} = 12e^{3x}$

Dostávám rovnici pro y_1:

$$y_1''(x) - 4y_1'(x) + 4y_1(x) = 3x^2 - 4x$$

Char. pol. je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$\tilde{y}_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

RHS je $3x^2 - 4x = e^0((3x^2 - 4x)\cos(0) + 0\sin(0))$

0 není kořen char. pol., tedy hledám řešení

$$\hat{y}_1(x) = ax^2 + bx + c$$

Pak

$$\hat{y}_1'(x) = 2ax + b$$

$$\hat{y}_1''(x) = 2a$$

Dosazením do rovnice:

$$2a - 8ax - 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c = 3x^2 - 4x$$

Dostáváme soustavu:

$$\left.\begin{aligned} 4a &= 3 \\ 4b - 8a &= -4 \\ 2a - 4b + 4c &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{3}{4} \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Obecné řešení je:

$$y_1(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Z prvního řádku matice:

$$y_1'(x) - y_1(x) + y_2(x) = -x^2$$

Tedy

$$y_2(x) = -x^2 - y_1'(x) + y_1(x)$$

$$= -x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - 2c_1e^{2x} - 2c_2xe^{2x} - c_2e^{2x} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{8} - c_1e^{2x} + c_2\left(-xe^{2x} - e^{2x}\right)$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ -e^{2x} & -x e^{2x} - e^{2x} \end{pmatrix} \cdot C + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$C \in \mathbb{R}^2$

2) $$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) + \sin(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) + \cos(x) \end{cases} ; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

Rozšířená λ-matice má tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & \sin(x) \\ 1 & \lambda & \cos(x) \end{array}\right) -\lambda \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1-\lambda^2 & \sin(x)-\lambda\cos(x) \\ 1 & \lambda & \cos(x) \end{array}\right)$$

Dostáváme rovnici $\left[\lambda \cos(x) \rightsquigarrow -\sin(x) \right]$

$$y_2''(x) + y_2(x) = -2\sin(x)$$

Char. pol. je

$$x^2+1 = (x+i)(x-i),$$ dostávám obecné

řešení homogenní rovnice

$$\tilde{y}_2(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

Pravá strana je $-2\sin(x) = e^0(0\cos(x) - 2\sin(x))$,

i je kořenem char. pol. násobnosti 1.

Hledám řešení tvaru

$$\hat{y}_2(x) = x\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right)$$

$$\hat{y}_2'(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + x\left(b\cos(x) - a\sin(x)\right)$$

$$\hat{y}_2''(x) = 2b\cos(x) - 2a\sin(x) + x\left(-a\sin(x) - b\cos(x)\right)$$

Dosazením do rovnice:

$$2b\cos(x) - 2a\sin(x) = -2\sin(x)$$

tj.

$a = 1$

$b = 0$

Dostávám $\hat{y}_2(x) = x\cos(x)$

Dostaneme obecné řešení

$$y_2(x) = x\cos(x) + C_1\cos(x) + C_2\sin(X)$$

Z druhého řádku matice:

$$y_1(x) + y_2'(x) = \cos(x)$$

$$y_1(x) = x\sin(x) + C_1\sin(x) - C_2\cos(x)$$

Dohromady:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$C \in \mathbb{R}^2$

Z p.p.:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = 0 \in \mathbb{R}^2, \qquad Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} x\sin(x) \\ x\cos(x) \end{pmatrix}$$

3)
$$u'(x) = 4u(x) + 3v(x) - 3w(x)$$
$$v'(x) = -3u(x) - 2v(x) + 3w(x)$$
$$w'(x) = 3u(x) + 3v(x) - 2w(x) + 2e^{-x}$$

Rozšířená λ-matice má tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-4 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & \lambda+2 & 2e^{-x} \end{array}\right) \quad \frac{(\lambda-4)}{3} \quad +1 \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-\lambda & \frac{1}{3}\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}(\lambda-4)\,e^{-x} \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 2e^{-x} \\ -3 & -3 & \lambda+2 & 2e^{-x} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1 \\ \\ \end{array} \sim$$

(*)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}(\lambda-4)e^{-x}+2e^{-x} \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 2e^{-x} \\ -3 & -3 & \lambda+2 & 2e^{-x} \end{array}\right)$$

Dostáváme rovnici:

$$w''(x) + w'(x) - 2w = -4e^{-x}$$

$$(*) \cdot 3 = 2(\lambda - 4)e^{-x} + 6e^{-x} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow 2(e^{-x})' - 8e^{-x} + 6e^{-x} = -4e^{-x}$$

Char. pol. je $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$,

obecné řešení homogenní rovnice $w_0(x) = C_2 e^{-2x} + C_1 e^{x}$

RHS je tvaru $-4e^{-x} = e^{-x}(-4\cos(0) + 0\sin(0))$,

-1 není kořen char. pol. Hledám řešení

$$\left.\begin{aligned} w_p(x) &= ae^{-x} \\ w_p'(x) &= -ae^{-x} \\ w_p''(x) &= ae^{-x} \end{aligned}\right\}$$

Dosazením do rovnice

$$-2a e^{-x} = -4e^{-x}$$

$$a = 2$$

Obecné řešení je $w(x) = 2e^{-x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

Z druhého řádku matice dostaneme rovnici:

$$v'(x) - v(x) + w'(x) - w(x) = 2e^{-x}$$

$$v'(x) - v(x) = 2e^{-x}$$

$$+2e^{-x} - c_1 e^{x} + c_2 2e^{-2x}$$

$$+2e^{-x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$= 6e^{-x} + 3c_2 e^{-2x}$$

Char. pol. je $\lambda - 1$, homogenní rovnice má obecné řešení: $v_0(0) = C_3 e^{x}$

$$\text{RHS} = \underbrace{6e^{-x}}_{(1)} + \underbrace{3c_2 e^{-2x}}_{(2)}$$

(1) je spec. tvaru, hledám řešení

$v_1(x) = a e^{-x}$, z rovnice:

$$-2a e^{-x} = 6 e^{-x} \quad \text{i.e.} \quad a = -3$$

(2) je spec. tvaru, hledám řešení

$v_2(x) = a\, e^{-2x}$ z rovnice:

$$-3a\, e^{-2x} = 3C_2\, e^{-2x} \quad \text{i.e.} \quad a = -C_2$$

Dohromady dostávám obecné řešení:

$$v(x) = -3e^{-x} - C_2 e^{-2x} + C_1 e^{x}$$

ze třetího řádku matice:

$$-3u(x) - 3v(x) + w'(x) + 2w(x) = 2e^{-x}$$

$$-3u(x) - 3c_3 e^{x} + 9e^{-x} + 3c_2 e^{-2x}$$

$$-\cancel{2e^{-x}} + c_1 e^{x} - \cancel{2c_2 e^{-2x}}$$

$$+\cancel{4e^{-x}} + 2c_1 e^{x} + \cancel{2c_2} e^{-2x} = \cancel{2e^{-x}}$$

$$-3u(x) = -9e^{-x} + 3c_3 e^{x} - 3c_2 e^{-2x}$$

$$-3c_1 e^{x}$$

$$u(x) = 3e^{-x} - c_3 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$+ c_1 e^{x}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-2x} & -e^{x} \\ 0 & -e^{-2x} & e^{x} \\ e^{x} & e^{-2x} & 0 \end{pmatrix} \cdot C + \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ -3e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$C \in \mathbb{R}^3$